정답과 핵심 해설

정답을 확인하고, 필요한 생각을 짚어 보세요.

출제·해설 | 황재하

문항	01	02	03	04	05	06	07	08
정답	④	⑤	②	①	③	②	⑤	④
배점	3점	3점	3점	3점	4점	4점	4점	4점

문항	09	10	11	12
정답	$1 \le a \le 3$	$a=9,\ b=2$	12	15
배점	12점	12점	4점	4점

1~5번 · 필요한 생각만 확인하기

01 명제 필요조건과 대우

p가 q의 필요조건이면 다음이 참이다.

$$q \to p$$

그 대우인 $\sim p \to \sim q$도 참이다.

02 무리식 근호 안의 제곱

$x+1>0$, $x-2<0$이므로 근호 안의 제곱을 부호에 맞게 푼다.

$$(x+1)-(2-x)=2x-1$$

따라서 주어진 식은 $2x-1$이다.

03 함수의 정의 같은 함수

$f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$에서 다음을 얻는다.

$$a+b=2, \qquad 2a+b=5$$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로 $ab=-3$이다.

04 합성함수 필요한 입력 맞추기

$f(\frac{1}{2})=2$이므로 필요한 입력을 맞춘다. 함수 전체를 먼저 구할 필요가 없다.

$$g(2)=(g\circ f)(\tfrac{1}{2})=0$$

따라서 $(f\circ g)(2)=f(0)=1$이다.

05 무리함수·역함수 역함숫값

근호 안의 조건 $a-x\ge 0$에서 정의역은 $\{x \mid x\le a\}$이므로 $a=4$이다. 또한 $\sqrt{a-x}\ge 0$이고 $x=a$에서 0이 되므로 치역은 $\{y \mid y\ge b\}$이다. 따라서 $b=-1$. $f^{-1}(2)=t$라 하면 $f(t)=2$이다.

$$\sqrt{4-t}-1=2$$

따라서 $t=-5$이다.

정답과 핵심 해설

조건을 식으로, 그래프를 함수로

출제·해설 | 황재하

6~8번 · 조건을 해석하는 연습

06 유리함수·부등식 거리와 산술·기하평균

$y=\dfrac{9}{x-1}+2$이므로 두 점근선은 $x=1$, $y=2$이다. $u=x-1>0$이라 하면 거리의 합은

$$u+\frac{9}{u}\ge 2\sqrt{9}=6.$$

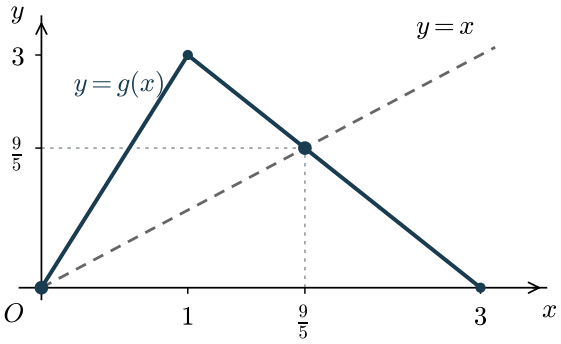
$u=3$, 즉 $P=(4,5)$에서 등호가 성립하므로 최솟값은 6이다.

07 명제·집합 반례를 원소로 바꾸기

$P=\{3,6\}$, $Q=\{2,4,6,8\}$. $P\subset R$이므로 3과 6은 반드시 포함된다. 반례 집합은 $R-Q$이며 원소 수가 2여야 한다. 이미 3이 있으므로 1, 5, 7 중 하나를 더 고르고, 2, 4, 8은 자유롭게 넣거나 뺀다. 따라서 $3\times 2^3=24$.

08 합성함수 그래프 안쪽 함수의 출력값을 따라가기

같은 x에서 두 그래프의 높이를 짝지으면 $(f(x),\,(g\circ f)(x))$가 g의 그래프 위의 점이 된다. f의 치역은 $\{y\mid 0\le y\le 3\}$ 전체이므로 g가 모두 결정된다.



복원한 함수와 고정점

$$g(t)=\begin{cases}3t & (0\le t\le 1),\\ \dfrac{9-3t}{2} & (1<t\le 3).\end{cases}$$

실선은 복원한 함수, 점선은 $y=x$이다.
두 그래프의 교점에서 $g(t)=t$의 해를 찾는다.

$t=g(x)$라 두면 $g(g(x))=g(x)$는 $g(t)=t$이다. 이 방정식에서 $t=0$ 또는 $t=\dfrac{9}{5}$이다.

목표 높이	그 높이로 가는 x
$g(x)=0$	$x=0,\ 3$
$g(x)=\frac{9}{5}$	$x=\frac{3}{5},\ \frac{9}{5}$

따라서 모든 실근의 합은 $0+3+\dfrac{3}{5}+\dfrac{9}{5}=\boxed{\dfrac{27}{5}}$이다.

확인할 점 $g(t)=t$의 해는 목표 높이이다. 그 높이로 가는 원래 입력 x를 한 번 더 찾아야 한다.

정답과 핵심 해설

풀이의 근거와 끝점을 확인하기

출제·해설 | 황재하

9~10번 · 서술형 풀이 완성하기

09 명제·진리집합 필요조건의 방향과 열린 끝점

p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$$P=\{x \mid -1 \le x \le 5\}, \qquad Q=\{x \mid a-2<x<a+2\}.$$

p가 q의 필요조건이므로 $q \to p$가 참, 즉 $Q \subset P$이어야 한다. 따라서

$$a-2 \ge -1, \qquad a+2 \le 5$$

이므로 $\boxed{1 \le a \le 3}$이다. $a=1$일 때 $Q=\{x \mid -1<x<3\}$, $a=3$일 때 $Q=\{x \mid 1<x<5\}$이므로 두 끝값 모두 가능하다.

10 무리함수의 최대·최소 최대·최소에서 계수를 거꾸로 결정하기

구간 전체에서 정의되려면 $a \ge 8$이다. x가 증가하면 $a-2x$가 감소하므로 최댓값은 $f(0)$, 최솟값은 $f(4)$이다.

$$\sqrt{a}+b=5, \qquad \sqrt{a-8}+b=3.$$

두 식을 빼면 $\sqrt{a}-\sqrt{a-8}=2$. 두 근호의 제곱의 차가 8이므로

$$(\sqrt{a}-\sqrt{a-8})(\sqrt{a}+\sqrt{a-8})=8$$

에서 두 근호의 합은 4이다. 합과 차를 이용하면 $\sqrt{a}=3$, $\sqrt{a-8}=1$. 따라서 $\boxed{a=9,\ b=2}$이다.

정답과 핵심 해설

계산 전에 구조를 보기

출제·해설 | 황재하

11~12번 · 복합 조건에서 단서 찾기

11 유한집합·반복합성 세 번 뒤에 제자리

$f(u)=f(v)$이면 양변에 f를 두 번 적용하여 $u=v$를 얻는다. 따라서 f는 일대일함수이고, 유한집합 X에서 X로의 함수이므로 일대일대응이다.

$f(1)=2$이고 $f(f(f(1)))=1$이므로

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow c \longrightarrow 1$$

의 순환이 생긴다. c는 3, 4, 5, 6 중 하나로 4가지이다. 세 번 적용하면 제자리로 돌아오므로 순환 길이는 3의 약수인 1 또는 3이어야 한다. 두 원소끼리 맞바꾸면 세 번 적용했을 때 상대 원소로 가므로 불가능하다. 따라서 남은 세 원소는 모두 제자리로 가거나, 세 원소끼리 순환해야 한다. 세 원소를 u, v, w라 하면 가능한 방식은

$$f(u)=u,\ f(v)=v,\ f(w)=w,$$
$$u \to v \to w \to u, \qquad u \to w \to v \to u$$

의 3가지이다. 따라서 함수의 개수는 $\boxed{4\times 3=12}$이다.

12 유리·무리함수의 해 개수 실근이 세 개라는 조건부터

$x<2$인 가지의 치역은 $\{y \mid y<b\}$이고, $x\geq 2$인 가지의 치역은 $\{y \mid y\leq b\}$이다. 각 가지에서는 한 높이에 대응하는 점이 하나씩 있다. 특히 높이 b는 오른쪽 가지의 시작점 $(2,b)$에서만 얻어진다.

$t\geq 0$일 때 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

t	0	$0<t<b$	$t=b$	$t>b$
실근의 개수	2	4	3	2

따라서 $|f(0)|=b$. $f(0)=b-\dfrac{a}{2}<b$이고 $a>0$이므로 $f(0)=-b$, 즉 $a=4b$이다.

$f(x)=b$의 해는 $x=2$ 하나이고, $f(x)=-b$의 두 해는

$$x=2-\tfrac{a}{2b}=0, \qquad x=2+4b^2.$$

세 실근의 합이 40이므로 $0+2+(2+4b^2)=40$. $b>0$에서 $b=3$, $a=12$이다. 따라서 $\boxed{a+b=15}$.
원래 조건 확인 $a=12$, $b=3$일 때 실근은 $0, 2, 38$로 서로 다르고, 합은 40이다.

제0회 학습진단표

응시 → 진단 → 처방 → 재도전

출제·해설 | 황재하

성명 _____ 학교 / 반 _____

총점	풀이 시간	다시 풀 문항 수
_____ / 60점	_____ 분	_____ / 12문항

문항	점검할 학습 요소	정답	풀이 설명 가능	다시 풀기
1~6번 · 개념·정의·표준 적용				
01	명제	☐	☐	☐
02	무리식	☐	☐	☐
03	함수의 정의	☐	☐	☐
04	합성함수	☐	☐	☐
05	무리함수·역함수	☐	☐	☐
06	유리함수·부등식	☐	☐	☐
7~8번 · 명제·그래프·조건 해석				
07	명제·집합	☐	☐	☐
08	합성함수 그래프	☐	☐	☐
9~12번 · 복합 조건·서술·고난도 적용				
09	명제·진리집합	☐	☐	☐
10	무리함수의 최대·최소	☐	☐	☐
11	유한집합·반복합성	☐	☐	☐
12	유리·무리함수의 해 개수	☐	☐	☐

나의 학습 처방

점수와 함께 풀이를 확인하세요

기본 개념 점검

1~6번 · 20점

개념·정의·표준 적용을 확인하세요. 맞혔어도 오래 걸렸다면 더 짧은 풀이를 점검하세요.

조건 해석 연습

7~8번 · 8점 / 9~10번 · 24점

명제↔집합, 함수↔그래프로 번역하세요. 서술형은 조건을 옮긴 식·끝점·결론까지 완성하세요.

고난도 재도전

11~12번 · 8점

대응 구조와 높이별 해의 개수를 먼저 보세요. 계산을 시작하기 전의 단서를 다시 찾으세요.

내가 다시 판단할 한 가지

틀린 이유 개념 · 조건 해석 · 계산 · 끝점/누락 · 풀이 서술

다음에 확인할 조건

다시 풀 날짜 _____년 ____월 ____일

점수보다 중요한 건, 다음에 무엇을 공부할지 아는 것입니다.

진단표를 완성한 후 상담하면 제0회 결과를 바탕으로 취약 유형과 우선 보완 영역, 대륜고 기말 대비 학습 순서를 안내받을 수 있습니다.

문항별 취약 유형 분석 · 점수대별 보완 학습 안내 · 개인별 추천 유사문제

상담 및 문의 | 중앙SKY학원 053-741-9188
대륜고 수학 담당 황재하

이 진단표는 학습 방향을 정하기 위한 자료이며, 학교 성적이나 등급을 예측하지 않습니다.